

Formulaire de trigonométrie

Les fonctions trigonométriques circulaires directes sont les fonctions *cosinus* ($\cos$), *sinus* ($\sin$), et *tangente* ($\tan$).

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques et elles ont pour image $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1] = \cos(\mathbb{R})$.

La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

La fonction tangente est définie sur $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ par $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. Elle est π -périodique, impaire et $\tan(D) = \mathbb{R}$.

1. Identités fondamentales :

D'après la formule d'Euler, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ et

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \Re(e^{it}) \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \Im(e^{it})$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

Réciproquement, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, il existe un unique réel $t \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos(t)$ et $b = \sin(t)$.

2. Valeurs particulières

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	<i>n.d.</i>	0

3. Périodicité et invariance

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{lll} \cos(x + \pi) = -\cos(x) & \sin(x + \pi) = -\sin(x) & \tan(x + \pi) = \tan(x) \\ \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos(x) & \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x), & k \in \mathbb{Z} \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\ \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) & \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) & \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) & \end{array}$$

On peut “retrouver” ces relations sur le cercle trigonométrique. Elles permettent de compléter le tableau de valeurs particulières ci-dessus (avec les valeurs en $\frac{2\pi}{3} \dots$).

4. Dérivabilité

Les fonctions sinus et cosinus sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et elles vérifient : $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

$$\text{Ainsi pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \cos'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

On en déduit donc que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

La fonction $\tan$ est infiniment dérivable sur D et $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

5. Formules d'addition et produit

(a) Sinus, Cosinus et Tangente d'une somme

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b), \\ \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a), \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b), \\ \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a) \end{aligned}$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \{a, b, a + b\} \subset D, \quad \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}.$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \{a, b, a - b\} \subset D, \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

En particulier on en déduit les formules de l'angle double :

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \cos(a) \sin(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \cos(2a) &= 2 \cos^2(a) - 1 \\ \cos(2a) &= 1 - 2 \sin^2(a). \\ \tan(2a) &= \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \end{aligned}$$

On utilisera souvent les conséquences suivantes :

$$\begin{aligned} \cos^2(a) &= \frac{\cos(2a) + 1}{2} \\ \sin^2(a) &= \frac{1 - \cos(2a)}{2} \end{aligned}$$

(b) Sommes et Produits de Sinus et Cosinus

Les formules précédentes permettent d'établir, pour a et b réels quelconques :

$$\begin{aligned} \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)) \\ \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b)) \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) + \sin(b) &= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

6. Transformation $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $\frac{x}{2} \in D$, i.e. $x \in \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a les expressions :

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Si de plus, $x \in D$, alors,

$$\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

7. Équations trigonométriques

Soient x et y des réels.

- $\sin(x) = \sin(y)$ si et seulement si $x \equiv y [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - y [2\pi]$
- $\cos(x) = \cos(y)$ si et seulement si $x \equiv y [2\pi]$ ou $x \equiv -y [2\pi]$
- $\cos(x) = \sin(y)$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{2} - y [2\pi]$ ou $x \equiv y - \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $\tan(x) = \tan(y)$ si et seulement si $x \equiv y [\pi]$