Feuille d'exercices : Systèmes linéaires

Exercice 1 Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & u & = & 13 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3u & = & 25 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4u & = & 2 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & 13 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 23t & + & 9u & = & 84 \end{array}\right. .$$

Exercice 2 Discuter et résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x - y + z & = & a \\ x + y - z & = & b \\ -x + 2y + z & = & c \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} 3x - 5y + 2z + 4t & = & a \\ 7x - 4y + z + 3t & = & b \\ 5x + 7y - 4z - 6t & = & c \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} 2x - y + z & = & a \\ -x + 3y - 5z & = & b \\ 8x - 9y + 13z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 3 Discuter et résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & 1 \\ x & + & ay & + & abz & = & a \\ bx & + & a^2y & + & a^2bz & = & a^2b \end{array}\right. ,$$

avec a, b deux réels.

Exercice 4 Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ dont les matrices dans les bases canoniques sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau et l'image de f et g.

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 3 & a & b \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer en fonction des valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le noyau et l'image de f.

Exercice 6 Soit $n \geq 2$. On considère des n-uplets $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Discuter et résoudre le système $\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha_i - \beta_k) x_k = \gamma_k$.

Exercice 7 Discuter et résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_2 & = & ax_1 & +b \\ x_3 & = & ax_2 & +b \\ & & \cdots & \\ x_n & = & ax_{n-1} & +b \\ x_1 & = & ax_n & +b \end{array}\right. ,$$

avec a, b deux complexes.

Exercice 8 Soient $M_1, \ldots, M_n$ des points du plan, 2 à 2 distincts. Discuter de l'existence et déterminer tous les polygones $A_1, \ldots A_n$ tels que, pour tout $1 \leq j \leq n-1$, M_j soit le milieu de $[A_j, A_{j+1}]$, et M_n soit le milieu de $[A_n, A_1]$.