LLG HX4
2012/2013

Feuille d'exercices : Polynômes

Exercice 1 Soit K un corps. On considère $K[X]$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur K. Soient α un élément du corps K et $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que la famille $\left((X-\alpha)^k\right)_{0\leq k\leq n} = \left(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n\right)$ est une base de l'espace vectoriel $K_n[X] = \{A \in K[X] |\ \deg(A) \leq n\}$.

Exercice 2 Calculer le PGCD des polynômes $X^5 + 3X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 4X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X^2 + 3X + 1$.

Exercice 3 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Notons (q, r) le couple quotient/reste de la division euclidienne de m par n.

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$.
2. En déduire une C.N.S. portant sur n et m pour que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Quel est le PGCD de $X^n - 1$ et $X^m - 1$?

Exercice 4 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$. On pourra distinguer les cas $a = b$ et $a \neq b$.

Exercice 5

1. Soient A et B deux polynômes premiers entre eux de $\mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe un unique couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AP + BQ = 1$ avec $d(P) < d(B)$ et $d(Q) < d(A)$.
2. On prend maintenant $A = (1 - X)^n$ et $B = X^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(X) = Q(1 - X)$ et $Q(X) = P(1 - X)$.
3. Prouver qu'il existe un scalaire a tel que $(1 - X)P'(X) - nP(X) = aX^{n-1}$ En déduire P et a.

Exercice 6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 7 Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} X^{n_k}$ avec pour tout k, $\begin{cases} n_k \in \mathbb{N} \\ n_k \equiv k[q] \end{cases}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} X^k$ divise P.

Exercice 8
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ non constant.

1. Montrer que l'application $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to \mathbb{K}[X] \\ P & \to P \circ A \end{cases}$ est linéaire et injective.
2. À quelle condition l'application est-elle un automorphisme ?
3. Réciproquement soit u un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[X]$. Vérifier l'existence de $(a, b) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $u(P) = P(aX + b)$.

Exercice 9 Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. On considère le polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.

1. Montrer que si $r = \dfrac{p}{q}$ (avec $p \wedge q = 1$) est racine de l'équation alors $q|a_n$ et $p|a_0$.
2. Que peut-on conclure si le polynôme P est unitaire (i.e. $a_n = 1$) ?
3. Si $r = \dfrac{p}{q}$ (avec $p \wedge q = 1$) est racine de l'équation montrer que :
$$\forall m \in \mathbb{Z},\ p - mq|P(m).$$
4. Donner une décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ du polynôme $2X^3 + 5X^2 - 8X - 12$.

Exercice 10 Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré n. On définit le contenu de P, $cont(P) = a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$. On dit que P est primitif si $cont(P) = 1$.

1. Montrer que si P et Q sont primitifs alors PQ est primitif, et plus généralement montrer que pour tout (P, Q), $cont(PQ) = cont(P)cont(Q)$.
2. Soient P et Q unitaires appartenant à $\mathbb{Q}[X]$. On suppose de plus que $PQ \in \mathbb{Z}[X]$. Prouver que P et $Q \in \mathbb{Z}[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. On suppose qu'il n'admet aucun diviseur dans $\mathbb{Z}[X]$ non constant et non proportionnel à lui-même. Prouver qu'alors P est irréductible sur Q.
4. Prouver que $X^4 - 10X^2 + 1$ et $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X - a_j) - 1$ (où les $a_j \in \mathbb{Z}$ sont deux à deux distincts) sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 11 Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $p | a_j$, mais que p ne divise pas a_n et que p^2 ne divise pas a_0.

1. Montrer que si $P = QR$ avec Q et $R \in \mathbb{Z}[X]$, alors Q ou R est nécessairement un polynôme constant.
2. En déduire que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. *Application :* Montrer que $P = X^6 - 25X^5 + 10X^2 + 15$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 12 Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^6 - 1$
2. $X^5 + 1$
3. $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$
4. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$

Exercice 13 Factoriser $P(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)}{k!}$.

Exercice 14 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé.

1. Montrer que $x \mapsto (P'(x))^2 - P(x)P''(x)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
2. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, montrer que pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 15 Soit n un entier ≥ 2. Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ admet-il une racine multiple ?

Exercice 16 Soit n un entier ≥ 5. Posons le polynôme $P = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1$.

1. Quel est le nombre de racines complexes de P (en tenant compte des ordres de multiplicité) ?
2. Démontrer que $P = (X^3 + X^2 + X + 1) \times \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k \right)$.
3. En déduire les racines de P.
4. P est-il scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$? P est-il scindé sur $\mathbb{R}$?
5. Que vaut la somme des racines de P ? Le produit des racines de P ?

Exercice 17

1. Prouver que
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{n})z + 1 \right).$$
2. (a) Résoudre $z^{4n} - 1 = 0$.
   (b) Prouver que
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{4k} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2i\sin(\frac{k\pi}{2n}) - 1 \right) \left(z^2 + 2i\sin(\frac{k\pi}{2n}) - 1 \right).$$
3. En déduire la formule
$$\sin(\frac{\pi}{2n})\sin(\frac{2\pi}{2n})\sin(\frac{3\pi}{2n}) \ldots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Exercice 18 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = (1 + iX)^n - (1 - iX)^n$.

1. Déterminer, selon la parité de n, le degré de P.
2. Déterminer les racines de P dans les deux cas : n pair et n impair et en déduire la décomposition de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
3. En déduire, lorsque n est impair, la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \tan(\frac{k\pi}{n})$.

Exercice 19
Soit n un entier ≥ 2 et $P = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Calculer le polynôme dérivé P'.

2. Montrer que z est racine de P' si et seulement si $\left(1+\frac{1}{z}\right)$ est une racine n-ième de l'unité autre que 1.

3. En déduire que les racines de P' sont les

$$z_k = \frac{1}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)},\ \text{pour } k \in \{1,\dots,n-1\}$$

4. En déduire que P possède une racine multiple si et seulement si

$$\lambda = (-1)^k \times \left(\frac{-i}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)^n,\ \text{pour } k \in \{1,\dots,n-1\}$$

Exercice 20 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire. Montrer l'équivalence entre

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$.

(ii) Toute racine réelle est d'ordre pair.

(iii) Il existe $(A,B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

(iv) Il existe $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\bar{C}$.

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes vérifiant ces conditions. Montrer l'équivalence entre

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(x) \geq 0$.

(ii) Il existe $(A,B) \in \mathcal{P}^2$ tel que $P = A + XB$.

Exercice 21 Soient P et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constants, tels que l'ensemble des racines de P (*resp.* $P-1$) soit égal à l'ensemble des racines de Q (*resp.* $Q-1$). Montrer que $P = Q$.

Exercice 22 Soit P un polynôme à coefficients rationnels de degré 5 admettant une racine complexe double. Montrer que P a une racine rationnelle.

Exercice 23 Soient $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ les racines de $X^4 + pX + q$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} x_k^{10}$.

Exercice 24 Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ xyz = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 25 Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que toutes les racines de P ont une partie réelle négative *ssi* $\begin{cases} & a > 0 \\ & b > 0 \\ 0 < & c < ab \end{cases}$

Exercice 26 Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Les images des racines de P forment un parallélogramme.
2. Il existe un complexe h tel que $Q(X) = P(X+h)$ soit bicarré.
3. P' et P''' ont une racine commune.

Exercice 27 Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$. Soit k un sur-corps de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \subset k$). Montrer que même dans k, P n'admet aucune racine multiple.

Exercice 28 Soit $P \in Q[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité strictement plus grande que $\frac{n}{2}$. Montrer que nécessairement $\alpha \in \mathbb{Q}$.