Introduction aux intégrales généralisées et séries

Exercice 1 Étudier la nature des séries de terme général :

1. $1 - n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
3. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
4. $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$
5. $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$
6. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$.

Exercice 2 Dans cet exercice, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \beta_n$ avec $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $h \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$. Montrer qu'il existe $\gamma > 1$ tel que $v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$.
   (b) En déduire que la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente.
   (c) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.
   (d) À quelle condition sur α la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
2. *Application (formule de Stirling) :* On considère la suite $u_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$
   (a) En appliquant le résultat de la question précédente, montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = C$.
   (b) En déduire que $n! \sim \frac{C\sqrt{n}n^n}{e^n}$.
   (c) En utilisant un résultat sur les intégrales de Wallis, en déduire la valeur de C et la formule de Stirling.

Exercice 3

1. Expliquer que pour tout $x \in [0, 1[$ la série $\sum \frac{x^n}{1 + x^n}$ converge. Que peut-on dit pour $x = 1$?

   On note, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$. On souhaite trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1.

   On introduit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + \mathrm{e}^{-t}} \end{cases}$.
2. Vérifier que pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g(nu)$ avec $u = -\ln(x)$.
3. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^\infty g(tu)\, \mathrm{d}t$ converge.
5. Calculer pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty g(tu)\, \mathrm{d}t$ (en fonction de u).
6. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $\int_0^\infty g(tu)\, \mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_0^\infty g(tu)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2}$, avec $u = -\ln(x)$.
7. En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 4 * Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, décroissante, telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$.
2. Donner un contre-exemple dans le cas où (u_n) n'est pas décroissante.

Exercice 5 * Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge. Étudier en fonction des valeurs de α la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

Exercice 6

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(x+1)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{p}}}\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\theta} \frac{\mathrm{d}x}{(\cos^2 x - \cos^2\theta)^m}$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{ch}t - \cos t}{t^{\frac{5}{2}}}$

Exercice 7 Montrer l'existence de l'intégrale suivante et en calculer la valeur : $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 8 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ converge et qu'elle est nulle.

Exercice 9

1. Pour quelle valeur de $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^x\ \mathrm{d}x$ est-elle définie ?
2. Calculer ses valeurs pour $x = n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que pour tout $t \geq 0$, $e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$
2. Montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$ $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}W_{2n-2}$ et $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \sqrt{n}W_{2n+1}$, avec (W_n) les intégrales de Wallis.
4. Sachant que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 11 Vérifier l'existence et calculer la valeur commune des intégrales suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\ \mathrm{d}x$$

Exercice 12 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{e}^{inx}\ \mathrm{d}x = 0$.

Exercice 13 Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x}\ \mathrm{d}x$ converge.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\ \mathrm{d}x$ converge et en calculer la valeur.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\ \mathrm{d}x$ convergent et calculer leur valeur.

Exercice 14 * Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f^2 et f''^2 sont $\mathbb{R}$-intégrables. Prouver que f'^2 l'est également et majorer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2$ en fonction des intégrales de f^2 et f''^2.

Exercice 15 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $\dfrac{f'(t)}{f(t)} \sim_{t\to+\infty} \dfrac{\lambda}{t}$ avec $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -1$. Selon les valeurs de λ, f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?