

Feuille d'exercices : Fractions rationnelles

Exercice 1 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

1. $\frac{X^4 + 1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)}$
2. $\frac{X^{10}}{X^{20} - 1}$
3. $\frac{X^7}{(X^2 + X + 1)^2}$

Exercice 2 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions suivantes :

1. $\frac{n!}{X(X+1)(X+2)\dots(X+n)}$ pour $n \geq 1$
2. $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$
3. $\frac{X^n + 1}{X^n - 1}$

Exercice 3 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme de degré n . On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses racines. Exprimer à l'aide de P et de ses dérivées :

1. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{X - x_i}$
2. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - x_i)^2}$
3. $\sum_{k \neq l} \frac{1}{(X - x_k)(X - x_l)}$

Exercice 4 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme scindé à racines simples. On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses racines. On suppose que P ne s'annule pas en 0.

1. Montrer que : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$.
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg Q \leq n - 2$. Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{Q(x_i)}{P'(x_i)}$.

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme de degré n . On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses racines. Soit z une racine du polynôme dérivé P' (différente des x_j). Montrer que z est barycentre à coefficients positifs de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Exercice 6 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n .

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{\prod_{j \neq k} (k - j)}$. On pourra utiliser $Q = \prod_{k=0}^n (X - k)$.
2. En déduire qu'il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}$.

Exercice 7 Montrer qu'il existe une unique fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que pour tout θ (pour lesquels les deux membres sont bien définis) $\tan(n\theta) = F(\tan \theta)$. Décomposer F en éléments simples.

Exercice 8 Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle telle que $F(-X) = F(X)$. Montrer qu'il existe $G \in \mathbb{C}(X)$ tel que $F(X) = G(X^2)$.

Exercice 9 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .

Exercice 10 Soit $(A, B, C) \in (\mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C})^3$ tel que $A + B + C = 0$ et $\text{PGCD}(A, B, C) = 1$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$, on note $N_0(P)$ le nombre de zéros distincts de P .

1. On note $F = \frac{A}{C}$ et $G = \frac{B}{C}$, vérifier que $\frac{B}{A} = \frac{G}{F} = -\frac{F'}{F}$.
2. Montrer que $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) \leq N_0((ABC) - 1)$.
3. Soit $n \geq 3$, démontrer qu'il n'existe pas $(P, Q, R) \in (\mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C})^3$ tels que $P^n + Q^n = R^n$.