LLG HX4
2012/2013

Feuille d'exercices : Fonction d'une variable réelle

Exercice 1 Déteminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}\, \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\, \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) + x}{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) - x}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) + x}{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) - x}$

Exercice 2

1. Démontrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et admet une limite λ en $+\infty$, alors f est constante égale à λ.
   On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on pose :
   $$F = \{f \in E \mid f \text{ est de période } 1\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \mid \lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 0\}.$$
2. Démontrer que F et G sont des s.e.v de E.
3. Montrer que F et G sont en somme directe (i.e. $F \cap G = \{0_E\}$).
4. F et G sont-ils supplémentaires dans E ? (On pourra considérer $f \in E$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$)

Exercice 3 Soit f une fonction numérique définie et croissante sur $\mathbb{R}$ telle que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 4 Étudier les points de continuité des fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)} \qquad x \longmapsto \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad x \longmapsto \begin{cases} x\mathrm{E}(\dfrac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 5 On définit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{Q}^* & \mapsto \dfrac{1}{q} \text{ où } x = \dfrac{p}{q} \text{ avec } pgcd(p, q) = 1 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \mapsto 0 \\ 0 & \mapsto 1 \end{cases}$. Étudier la continuité de f.

Exercice 6 Soient f et g définies et continues sur I. Montrer que $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues sur I.

Exercice 7 Construire une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non continue en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que $|f|$ soit continue.

Exercice 8 Soit f une application continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ ayant en $+\infty$ une limite finie. Montrer que f est bornée et admet un maximum ou un minimum.
Montrer le même résultat pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et admettant la même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 9 Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π-périodiques et 1-périodiques.

Exercice 10 Démontrer que l'équation $x^2 \cos(x) + x \sin(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Soit $f : [a, b] \to [a, b]$, continue, montrer que f a au moins un point fixe.
Qu'en est-il si on ne suppose plus f continue mais que f est croissante ?

Exercice 12 Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, continue, telle que $\lim\limits_a f = \lim\limits_b f = l \in \bar{\mathbb{R}}$. Prouver que f n'est pas injective.

Exercice 13

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists \alpha_n \in [0,1], \quad f(\alpha_n + \frac{1}{n}) = f(\alpha_n).$$

Exercice 14 Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0 telles que

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(\frac{x}{2}) = f(x)$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

Exercice 15 Soit $a > 0$. Montrer que $x \mapsto a^x$ est la seule application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y) = f(x)f(y)$
2. f est continue
3. f(1)=a.

Exercice 16

1. Démontrer que si f est une bijection continue d'un intervalle I sur un intervalle $J = f(I)$, alors f est strictement monotone.
2. En déduire qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = l$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 18 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ soient réelles. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ périodique. Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue, montrer qu'il existe A et B deux réels tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq A|x| + B$. Montrer que la réciproque est fausse.