Feuille d'exercices : Espaces Vectoriels

Exercice 1 Soient E, F et G des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Redémontrer que

$$\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g) \text{ et } \ker(f) \subset \ker(g \circ f).$$

2. (a) Démontrer l'équivalence entre les énoncés :

i. $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0_F\}$

ii. $\ker(f) = \ker(g \circ f)$.

(b) Démontrer l'équivalence entre les énoncés :

i. $\text{Im}(f) + \ker(g) = F$

ii. $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$.

Exercice 2 Soient E, F, G trois $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer l'équivalence entre les énoncés :

(i) $\text{Im}(h \circ f) \subset \text{Im}(h \circ g)$;

(ii) $\text{Im}(f) + \ker(h) \subset \text{Im}(g) + \ker(h)$.

Exercice 3 Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tels que : $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

L'hypothèse $B \subset C$ est-elle vraiment nécessaire pour établir le résultat demandé ?

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On définit D comme le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $v = (1, 1, \dots, 1)$ et H par $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$. Montrer que $D \oplus H = \mathbb{R}^n$.

Exercice 5 Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Définissons les sous ensembles de E :

$$\begin{aligned} F &= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\} \\ G &= \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\} \end{aligned}$$

Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et qu'ils sont supplémentaires.

Exercice 6 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k$ en fonction de u et k .

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et g un endomorphisme de E . On définit C_g de $\mathcal{L}(E)$ sur lui-même par :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E) \quad C_g(f) = f \circ g - g \circ f.$$

1. Montrer que C_g est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que si g est nilpotent (c'est-à-dire s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^n = 0$), alors C_g l'est également.

Exercice 8 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E . Montrer que si f et g commutent alors $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont stables par g .

Exercice 9 Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Définissons l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} = (x, y) & \mapsto f(\vec{v}) = (x + y, x + y). \end{cases}$$

1. Démontrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

2. Démontrer que $\mathbb{R}^2 = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

3. f est-elle un projecteur ?

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa structure canonique de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Définissons l'application :

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ (x_1, x_2) & \mapsto (-2x_1 + 2x_2, -3x_1 + 3x_2). \end{cases}$$

1. Démontrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que f est un projecteur vectoriel.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. F_0, F_1, G_0 et G_1 des s.e.v. de E . Soit f (*resp.* g) le projecteur de E de noyau F_0 (*resp.* G_0) et d'image F_1 (*resp.* G_1). Supposons que $f \circ g = g \circ f$.

Démontrer que $h = f \circ g$ est un projecteur de E et que son image est $F_1 \cap G_1$.

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soient p et q deux projecteurs définis sur E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Interpréter cette condition en terme de noyaux et d'images de p et q .
3. Si $p + q$ est un projecteur, expliciter $\text{Im}(p + q)$ et $\ker(p + q)$.

Exercice 13

Soit E un K -espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier p , notons $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$ la composée p fois de f , et $K_p = \ker(f^p)$, $I_p = \text{Im}(f^p)$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Etablir que $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. Supposons qu'il existe un entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$. Montrer qu'alors $K_{r+1} = K_{r+2}$, et en déduire que pour tout $s \geq r$, $K_s = K_r$.
3. Supposons qu'il existe un entier naturel $r \leq n$ tel que $I_r = I_{r+1}$. Montrer qu'alors $I_{r+1} = I_{r+2}$. Et en déduire que pour tout $s \geq r$, $I_s = I_r$.
4. Exhiber une application linéaire telle qu'il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_r = I_{r+1}$ mais $K_r \neq K_{r+1}$.

Exercice 14 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie (c'est-à-dire que $f = \lambda \text{Id}_E$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$).
2. On suppose que pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer que f est alors une homothétie.
 - (a) Soit $x \in E$, $x \neq 0$; et soit F un supplémentaire de $\text{Vect}(x)$ dans E . On considère p le projecteur sur $\text{Vect}(x)$, parallèlement à F . En utilisant l'hypothèse sur f en déduire que $f(x) \in \text{Vect}(x)$, et donc que $(x, f(x))$ est liée.
 - (b) En déduire que f est une homothétie.

Exercice 15 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit $n \geq 2$. On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps infini (ou au moins de cardinal à n). Montrer que pour tous sous-espaces vectoriels $H_1, \dots, H_n$ de E , l'ensemble $\bigcup_{j \in \mathbb{N}_n} H_j$ est un sous-espace vectoriel si

et seulement si il existe $k_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $H_{k_0} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_n} H_j$.

Exercice 16 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F .

1. Montrer l'équivalence entre
 - (i) $\ker f \subset \ker g$
 - (ii) $\exists h \in \mathcal{L}(F)$, $g = h \circ f$
2. Montrer l'équivalence entre
 - (i) $\text{Im} g \subset \text{Im} f$
 - (ii) $\exists h \in \mathcal{L}(E)$, $g = f \circ h$