LLG HX4
2012/2013

Feuille d'exercices : Déterminants

Exercice 1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer le déterminant suivant (le donner sous forme factorisée) :

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ (1+\alpha)^2 & (1+\beta)^2 & (1+\gamma)^2 \\ (2+\alpha)^2 & (2+\beta)^2 & (2+\gamma)^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2 Calculer le déterminant de la matrice $(1+x_iy_j)_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1. Calculer le déterminant de la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ suivante (avec a, b et c des nombres réels) :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & 0 \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

Indication : On pourra commencer par chercher une relation de récurrence vérifiée par les D_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On considère

$$M_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Trouver les racines de $\det(M_n - xI_n)$.
(Indication : poser $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \alpha\beta$, et chercher x sous la forme $x = \alpha + \beta - 2\delta\cos\theta$))

Exercice 4 Calculer le déterminant de la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ suivante (avec a, b deux nombres réels) :

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 5 *Déterminant de Vandermonde :* Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, le déterminant de Vandermonde $VdM(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant de la matrice $(x_i^{j-1})_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, *i.e.*

$$VdM(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Rappeler l'expression de $VdM(x_1, \dots, x_n)$ (sous forme de produit). À quelle condition $VdM(x_1, \dots, x_n)$ est-il non nul ?
2. Soit $(P_0, \dots P_{n-1}) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré respectif $0, 1, \dots n-1$ et de coefficient directeur respectif $c_0, \dots c_{n-1}$, et soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Exprimer sous forme d'un déterminant de Vandermonde le déterminant de la matrice $(P_{j-1}(x_i))_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
3. En déduire le déterminant de la matrice $(\cos((j-1)\theta_i))_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 6 *Déterminant de Cauchy :* Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$ tel que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Calculer le déterminant de la matrice $(\dfrac{1}{a_i + b_j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 7 Matrice circulante : pour tout $(x_0,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{C}^n$, on définit :

$$M(x_0,\ldots,x_{n-1})=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{n-1}\\ x_{n-1} & x_0 & \ldots & x_{n-2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots\\ x_1 & x_2 & \ldots & x_0\end{pmatrix}.$$

1. Soit $J=M(0,1,0,\ldots,0)$. Montrer que pour tout $(x_0,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{C}^n$, $M(x_0,\ldots,x_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}x_kJ^k$.
2. Soit ω une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité et soit $Z_\omega=\begin{pmatrix}1\\ \omega\\ \omega^2\\ \vdots\\ \omega^{n-1}\end{pmatrix}$. Montrer que $JZ_\omega=\omega Z_\omega$.
3. En déduire les valeurs propres et vecteurs propres de J. Puis montrer qu'il existe $P\in Gl_n(\mathbb{C})$ et D une matrice diagonale tels que $J=P^{-1}DP$
4. En déduire que $\det(M(x_0,\ldots,x_{n-1}))=\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(x_0+x_1\omega+\ldots+x_{n-1}\omega^{n-1})$.

Exercice 8 Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe P dans $Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $B=P^{-1}AP$. On veut montrer qu'il existe $Q\in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $B=Q^{-1}AQ$.

1. Ecrivons $P=R+iS$ avec $(R,S)\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $RB=AR$ et $SB=AS$.
2. En déduire que :
$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ (R+\lambda S)B=A(R+\lambda S).$$
Conclure.

Exercice 9 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\det M$ pour que la matrice M soit inversible et que $M^{-1}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 10 Soit A un ensemble non vide, $\mathbb{K}$ un corps. Rappeler que $E=\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On considère $(f_j)_{1\leq j\leq n}\in E^n$. Montrer que cette famille est libre si et seulement si il existe $(x_i)_{1\leq i\leq n}\in A$ tel que $\det(f_j(x_i))_{i,j}\neq 0$.