LLG HX4
2012/2013

Feuille d'exercices : Fonctions convexes

Exercice 1 Une fonction f de I dans $\mathbb{R}_+^*$ est dite logarithmiquement convexe si $\ln f$ est convexe. Montrer que si f est logarithmiquement convexe alors f est convexe.
Étudier la réciproque.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Exercice 3 *Inégalité de Hölder et de Minkowski :* Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ainsi que $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des nombres réels positifs.

1. Montrer que : $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, uv \leq \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$.
2. En déduire que si $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n y_i^q = 1$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$.
3. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$
4. En déduire l'inégalité de Minkowski : pour tous réels $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$,
$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Exercice 4 Soit une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que si elle est majorée alors nécessairement elle est constante. Trouver un exemple d'une fonction f convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, majorée et non constante.

Exercice 5 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que la fonction $t \to \dfrac{f(t)}{t}$ tend vers une limite finie ou vers $+\infty$, lorsque t tend vers $+\infty$. Montrer que s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = \ell$, alors la fonction $t \to (f(t) - \ell t)$ tend vers une limite finie ou tend vers $-\infty$, lorsque t tend vers $+\infty$.
Interpréter géométriquement ces résultats.

Exercice 6 Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Prouver que f est convexe sur I si et seulement si pour tout $(x, y) \in I$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$.

Exercice 7 Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et a un point qui n'est pas une extrémité de I. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. En déduire que f est continue en tous les points de I qui ne sont pas des extrémités.

Exercice 8 Soient f une fonction convexe sur un intervalle I. Montrer que si f est dérivable sur I alors elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 9 Soit $n \geq 3$ fixé et soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R. Parmi tous les polygones à n côtés inscrits dans $\mathcal{C}$ déterminer ceux de périmètre maximal.

Exercice 10 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$0 \leq \frac{1}{2} f(1) + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(t) \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{8}\left(f'(n) - f'(1)\right).$$