

Feuille d'exercices : Coniques

Exercice 1 On considère, dans le plan $\mathcal{E}_2$, rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points M_θ de coordonnées (x, y) définies, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, par

$$x = \frac{\cos(\theta)}{2 + \cos(\theta)} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sin(\theta)}{2 + \cos(\theta)}.$$

1. Calculer en fonction de θ la distance $\|\overrightarrow{OM_\theta}\|$ et la distance de M_θ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.
2. En déduire que pour tout réel $\theta \in [0, 2\pi]$, les points M_θ appartiennent à une même ellipse (E) dont on précisera l'excentricité, le grand axe (axe focal) ainsi que les coordonnées des quatre sommets et des points d'intersection avec l'axe des ordonnées.
3. Tracer l'ellipse (E) . Donner son équation dans le repère orthonormé canonique.

Exercice 2 Miroir parabolique : convergence au foyer des rayons incidents parallèles à l'axe focal

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de paramètre p et de directrice $\mathcal{D}$.

1. Donner un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ adapté à $\mathcal{P}$, ainsi que son équation réduite. En déduire un paramétrage de $\mathcal{P}$.
2. On considère une droite Γ parallèle à l'axe focal de $\mathcal{P}$. Justifier pourquoi l'équation de Γ est du type $y = a$ dans $\mathcal{R}$, où a est une constante réelle.
 - (a) Déterminer le point d'intersection $M(\alpha; \beta)$ de Γ et de $\mathcal{P}$.
 - (b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en M .
 - (c) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$ en M , en choisissant le sens de sorte que si l'extrémité de $\vec{n}$ est en M , celui-ci pointe vers l'intérieur de la parabole.
 - (d) Déterminer $\vec{v}$ un vecteur directeur de Γ , en choisissant le sens de sorte que si l'extrémité de $\vec{v}$ est en M , celui-ci pointe vers l'intérieur de la parabole.
 - (e) Démontrer que

$$(\widehat{\vec{v}, \vec{n}}) \equiv (\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{MF}}) \quad [2\pi].$$
 - (f) En déduire que la normale $\mathcal{N}$ est la bissectrice des droites (FM) et Γ .
3. Déduire de ce qui précède que sur un miroir parabolique, un rayon parallèle à l'axe focal se réfléchit en un rayon qui passe par le foyer F de la parabole.

Exercice 3 Billard elliptique

En s'inspirant de la démarche de l'exercice 2, démontrer que si deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant chacune par un des foyers d'une ellipse $\mathcal{E}$ se coupent en un même point M de $\mathcal{E}$, alors la normale à $\mathcal{E}$ en M est bissectrice de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

En déduire que dans un billard elliptique (i.e. dont le contour est une ellipse), toute boule passant par un des foyers passe par l'autre foyer après un rebond.

Exercice 4 Soit la courbe d'équation cartésienne (dans le repère canonique $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ du plan $\mathcal{E}_2$) :

$$(\mathcal{C}) \quad : \quad 2y^2 + \sqrt{3}xy + x^2 + (2 + \sqrt{3})y + (1 - 2\sqrt{3})x - 4 = 0.$$

1. Identifier la nature de $\mathcal{C}$.
2. Donner un repère $\mathcal{R}'$ dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ est une équation réduite. On exprimera ce repère par son centre Ω et sa base orthonormée $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$: $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{u}_1; \vec{u}_2)$.
 - (a) Donner les éléments caractéristiques (foyer(s), excentricité, directrice, etc...) de $\mathcal{C}$ dans le repère adapté $\mathcal{R}'$.
 - (b) En déduire les coordonnées de ces mêmes éléments dans $\mathcal{R}$.
3. Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$. (On se servira bien entendu du repère $\mathcal{R}'$).

Exercice 5 Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par p une constante réelle strictement positive donnée et par $\mathcal{P}$ la courbe de représentation paramétrique $M(t)$, $t \in \mathbb{R}$ définie par : $\overrightarrow{OM}(t) = \frac{t^2}{2p} \vec{i} + t \vec{j}$.

1. Reconnaître et représenter graphiquement $\mathcal{P}$. Former une équation cartésienne de la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$.
2. Discuter, suivant les valeurs du nombre réel θ , l'existence et le nombre de points $M(t)$ de $\mathcal{P}$ différents de $M(\theta)$ tels que la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ passe par $M(\theta)$.
3. Montrer que les droites coupant $\mathcal{P}$ en deux points distincts tels que les normales à $\mathcal{P}$ en ces points se coupent sur $\mathcal{P}$, passent toutes par un point fixe à déterminer.

Exercice 6

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, considérons la parabole

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x(t) &= \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) &= t \end{cases}$$

et A un point de coordonnées (a, b) .

1. Donner le foyer, la directrice et l'excentricité de $(\mathcal{P})$.
2. Soit $M(t) (x(t), y(t))$ un point de $(\mathcal{P})$ ($t \in \mathbb{R}$).
 - (a) Déterminer l'équation de la tangente en $M(t)$ à $(\mathcal{P})$
 - (b) Démontrer que les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de la projection orthogonale $H(t)$ du point A sur cette tangente sont (*faire un dessin*) :

$$X(t) = \frac{(2a-1)t^2 + 2bt}{2(1+t^2)} \quad \text{et} \quad Y(t) = \frac{t^3 + 2at + 2b}{2(1+t^2)}.$$

Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le point $H(t)$ décrit une courbe Γ_A appelée podaire de $(\mathcal{P})$ pour le point A . Nous allons par la suite étudier quelques courbes Γ_A .

3. Calculer $X'(t)$ et $Y'(t)$. Étudier le signe de $X'(t)$ (qualitativement : ne pas chercher à calculer les racines éventuelles).
4. Étudier les branches infinies de Γ_A , ainsi que la position de Γ_A par rapport à l'asymptote éventuelle (en fonction du signe de b).
5. Tracer Γ_A pour $(a, b) = (0, 0)$. (bien mettre en valeur les branches infinies, les points singuliers...)

Exercice 7 Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole et E un point de cette hyperbole.

1. Montrer qu'il existe un repère (non nécessairement orthonormé) dans lequel l'hyperbole $\mathcal{H}$ admet une équation de la forme $xy = 1$. Dans la suite on pourra se placer dans un tel repère.
2. Démontrer que toute droite passant par E et non parallèle aux asymptotes de $\mathcal{H}$ rencontre $\mathcal{H}$ en au plus un point différent de E . Pour simplifier, on dira désormais qu'elle rencontre $\mathcal{H}$ en un autre point, éventuellement confondu avec E .
3. Si M_1 et M_2 sont deux points de l'hyperbole $\mathcal{H}$, on définit la droite $\mathcal{D}$ comme :
 - la parallèle à (M_1M_2) passant par E si $M_1 \neq M_2$.
 - la parallèle à la tangente en M_1 à $\mathcal{H}$ passant par E si $M_1 = M_2$.
 - (a) Vérifier que la droite $\mathcal{D}$ n'est jamais parallèle aux asymptotes de l'hyperbole.
 - (b) On définit sur $\mathcal{H}$ une loi de composition interne comme suit : le point $M_1 * M_2$ est l'autre point d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$ (éventuellement confondu avec E).
Démontrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ muni de cette loi $*$ est un groupe commutatif.
 - (c) Indiquer comment construire l'inverse d'un point pour cette loi. Quels sont les points qui sont leur propre inverse pour cette loi ?