Les calculatrices ne sont pas autorisées. Une attention toute particulière sera portée à la rédaction et à la présentation. Il sera tenu le plus grand compte de la rigueur et de la clarté du raisonnement.

Problème 1

Dans tout ce problème, G désignera un groupe fini dont l'élément neutre sera noté e_G. Pour tout $(g,g') \in G^2$, on notera simplement gg' la loi de composition interne de g et g'. On notera $|G|$ le cardinal de G.

Une représentation linéaire du groupe G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E et d'une application $\phi : \begin{cases} G & \to \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto \phi(g) = \phi_g \end{cases}$ telle

$$\begin{cases} \forall (g,g') \in G^2,\ \phi_{gg'} = \phi_g \circ \phi_{g'} \\ \phi_{e_G} = Id_E \end{cases}.$$

On dira que (E,ϕ) est une représentation linéaire de G ou simplement que E est une représentation linéaire de G (l'application ϕ étant dans ce cas sous-entendue).

I. Généralités :

On considère (E,ϕ) une représentation de G.

1. Expliquer que ϕ est un morphisme de groupes de G dans $(Gl(E), \circ)$. Quel est l'inverse de ϕ_g, pour $g \in E$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les $(\phi_g)_{g\in G}$. Montrer que $\psi : \begin{cases} G & \to \mathcal{L}(F) \\ g & \mapsto (\phi_g)_{|F} \end{cases}$ est une représentation de G. On la notera ϕ_F
3. *Sous-espace vectoriel des points fixes :* On note E_G l'ensemble des points fixes de E par G : $E_G = \{x \in E,\ \forall g \in G,\ \phi_g(x) = x\}$.
   Et on définit $\pi = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g\in G} \phi_g \ \in \mathcal{L}(E)$.
   a. Vérifier que E_G est un sous-espace vectoriel de E.
   b. Montrer que E_G est stable par tous les $(\phi_g)_{g\in G}$.
   c. Calculer, pour tout $h \in G$, $\phi_h \circ \pi$.
   d. Montrer que π est un projecteur.
   e. Établir que pour tout $x \in E$, $\pi(x) = x$ si et seulement si $x \in E_G$.
   f. En déduire que l'image du projecteur π est $\mathrm{Im}\pi = E_G$.

II. G-morphismes :

On considère (F,ψ) une autre représentation de G. Un G-morphisme est une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\forall g \in G,\ f \circ \phi_g = \psi_g \circ f.$$

On dira que E et F sont G-isomorphes s'il existe un G-morphisme $f \in \mathcal{L}(E,F)$ qui soit un isomorphisme.

1. Vérifier que l'emsemble $hom_G(E,F)$ des G-morphismes de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.
   Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ un G-morphisme.
2. Vérifier que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les ϕ_g, $g \in G$.
3. Vérifier que $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F stable par tous les ψ_g, $g \in G$.

III. Représentation irréductible :

On dit qu'une représentation (E,ϕ) de G est irréductible si et seulement si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les $(\phi_g)_{g\in G}$ sont E et $\{0_E\}$.

1. Montrer que si E est une représentation irréductible de G , tous les G-morphismes non nuls de E dans F (où F est une autre représentation) sont injectifs.
2. Montrer que si F est une représentation irréductible de G, tous les G-morphismes non nuls de E dans F (où E est une autre représentation) sont surjectifs.
   Dans les 3 questions suivantes, les représentations E et F sont supposées irréductibles.
3. Montrer que si les représentations E et F ne sont pas isomorphes, alors $\mathrm{hom}_G(E,F)$ est réduit à l'application nulle.
4. Montrer que $\mathrm{hom}_G(E,E)$ est composé des endomorphismes scalaires (c'est-à-dire des homothéties) de E. *Indication :* On pourra utiliser que si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f - \alpha Id_E \notin Gl(E)$.
5. En déduire que pour des représentations E et F isomorphes, $\dim \mathrm{hom}_G(E,F) = 1$.

IV. Existence de supplémentaire stable

On considère (E, ϕ) une représentation de G et F un sous-espace stable par les $(\phi_g)_{g\in G}$. On souhaite démontrer l'existence d'un sous-espace vectoriel de E , supplémentaire de F, stable par les $(\phi_g)_{g\in G}$.

1. À tout élément $f \in \mathcal{L}(E)$, on associe $\widetilde{f} = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G} \phi_g^{-1} \circ f \circ \phi_g \ \in \mathcal{L}(E)$.

   a. Vérifier que l'application $\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \to \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto \widetilde{f} \end{cases}$ est linéaire.

   b. Calculer pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $h \in G$, $\phi_h^{-1} \circ \widetilde{f} \circ \phi_h$. Et en déduire que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\widetilde{f}$ commute avec tous les ϕ_h, pour $h \in G$.

   c. Calculer $\widetilde{\widetilde{f}}$.

2. Soit p un projecteur d'image F (et de noyau F_1 un supplémentaire quelconque de F).

   a. Montrer que F est inclus dans l'image de $\widetilde{p}$.

   b. Montrer que $\widetilde{p}$ est un projecteur.

   c. Établir que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} \widetilde{p}$.

   d. En déduire que $\ker \widetilde{p}$ est un supplémentaire de F stable par tous les ϕ_g, pour $g \in G$.

V. Décomposition en représentations irréductibles :

Soit (E, ϕ) une représentation linéaire de G. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \ldots, F_p)$ des sous-espaces vectoriels de E tels que :

- $E = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{p} F_j$
- pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, (F_j, ϕ_{F_j}) est une représentation irréductible de G.

Problème 2

On s'intéresse aux équations différentielles linéraires d'ordre 2 :

$$(E)\ y''(t) + p(t)y(t) = 0$$

avec $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

I Généralités :

1. On considère $y \in \mathcal{S}$. On suppose p de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}$; montrer que $y \in \mathcal{C}^{k+2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
   Que peut-on dire si $p \in \mathcal{C}^\infty$?
   On s'intéresse dorénavant à une solution y de (E), non identiquement nulle, fixée.
2. On suppose que y s'annule en un point $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Montrer que ce zéro est isolé, c'est-à-dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap \mathbb{R}_+$, $t \neq t_0$, on ait $y(t) \neq 0$.

On suppose dorénavant qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 < m \leq p(t).$$

II Existence d'au moins un zéro :

On souhaite montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $t > A$ tel que $y(t) = 0$.
Soit $A > 0$. On suppose par l'absurde que pour tout $t > A$, $y(t) \neq 0$.

1. Expliquer qu'alors on a nécessairement
   - soit pour tout $t > A$, $y(t) < 0$
   - soit pour tout $t > A$, $y(t) > 0$.

   On supposera par exemple le deuxième cas (quitte à considérer $-y$).
2. Expliquer que y' est décroissante sur $]A, +\infty[$ (et donc que la fonction est concave).
3. On suppose qu'il existe $t_0 > A$ tel que $y'(t_0) < 0$. Montrer que pour tout $t > t_0$, $y(t) - y(t_0) \leq y'(t_0)(t - t_0)$. Aboutir à une contradiction.
   On en déduit donc que pour tout $t > A$ $y'(t) \geq 0$.
4. Expliquer que pour tout $t > A$, $y(t) \geq y(A) = \alpha$.
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y'(t) = -\infty$ et aboutir à une contradiction.
6. Conclure.

III Numérotation des zéros :

1. Expliquer que l'ensemble des zéros de y, $Z = \{x \in \mathbb{R}_+,\ y(x) = 0\}$ est non vide et admet un plus petit élément. On le notera x_0.
2. Soit t_1 un zéro de y. Montrer que l'ensemble $\{x > t_1,\ y(x) = 0\}$ admet un plus petit élément. Si on note t_2 ce plus petit élélement, on dira que t_1 et t_2 sont des zéros consécutifs.

3. En déduire que $Z = \{x_n \; n \in \mathbb{N}\}$ où la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

IV Entrelacement des zéros :

On considère $(t_1, t_2) \in Z^2$ deux zéros consécutifs de y (avec $t_1 < t_2$). On souhaite montrer que $t_2 - t_1 \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$.

Quitte à considérer $-y$, on peut supposer que pour tout $t \in]t_1, t_2[$, $y(t) > 0$.

1. a. Résoudre l'équation particulière : (E_m) $z''(t) + mz(t) = 0$.

   b. Expliquer qu'il existe une unique solution y_m de (E_m) telle que $\begin{cases} y_m(t_1) = 0 \\ y_m'(t_1) = \sqrt{m} \end{cases}$ et la donner (on pourra en donner une expression sous la forme $t \mapsto \sin(\alpha t + \beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$).

   c. Donner les zéros de y_m et montrer que deux zéros consécutifs sont toujours espacés d'une longueur l_m que l'on précisera.

   On s'intéresse à l'application suivante (appelée "Wronskien mixte") :

$$W = W(y, y_m) : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \begin{vmatrix} y(t) & y_m(t) \\ y'(t) & y_m'(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

   On notera $t_3 = t_1 + \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$. On veut montrer que $t_2 \leq t_3$. Supposons par l'absurde que $t_3 < t_2$. (On pourra faire un dessin pour mieux comprendre la situation).

2. Expliquer que W est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer la dérivée W'.
3. Montrer que W est croissant sur $[t_1, t_3]$.
4. Que vaut $W(t_1)$? En étudiant le signe de $W(t_3)$, aboutir à une contradiction.
5. Conclure.
6. Si on suppose qu'il existe $(m, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $m \leq p(t) \leq M$, montrer que deux zéros consécutifs $(t_1, t_2) \in Z^2$ vérifient

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq t_2 - t_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

V Un équivalent :

On suppose dans cette partie que $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \lambda > 0$. Donner un équivalent du $(n+1)$-ème zéro de y, x_n, quand n tend vers $+\infty$.