Problème 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, on note

$$V_p = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}(M) \leq p\}.$$

On notera également $J_p = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On souhaite montrer dans ce problème le théorème suivant :

Théorème 1 *Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, pour tout E sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, si E est inclus dans V_p alors* $\dim(E) \leq np$.

I. **Des exemples :**

Pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $f_M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'application linéaire représentée par M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note

$$K_F = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ F \subset \ker(f_M)\} \text{ et } I_F = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \mathrm{Im}(f_M) \subset F\}.$$

1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. On cherche à étudier I_F.
   a. Montrer que I_F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
   b. Montrer qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ tel que :
   $$\forall M \in I_F,\ \exists A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}),\ \exists C \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ PM = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   c. Expliquer que $I_F \subset V_p$.
   d. Montrer que $\dim(I_F) = np$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $q = n-p$. On cherche à étudier K_F.
   a. Montrer que K_F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
   b. Montrer qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ tel que :
   $$\forall M \in K_F,\ \exists A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}),\ \exists B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R}),\ MP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$$
   c. Expliquer que $K_F \subset V_p$.
   d. Montrer que $\dim(K_F) = np$.

II. **Réduction du problème :**

1. Expliquer que pour montrer le théorème 1, il est suffisant de montrer le résultat suivant :

   Théorème 2 *Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, pour tout E sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, si E est inclus dans V_p et s'il existe $M \in E$ de rang égal à p, alors* $\dim(E) \leq np$.
2. Montrer le résultat pour $p = 0$ et $p = n$.
   On se fixe désormais $p \in [\![1, n-1]\!]$.
3. Expliquer que si l'on montre le résultat :

   Théorème 3 *Pour tout E sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, si E est inclus dans V_p et que la matrice $J_p \in E$ alors* $\dim(E) \leq np$.

   alors on pourra en déduire le résultat voulu.

   On considère donc désormais E, un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans V_p et on suppose que $J_p \in E$. L'objectif de la partie suivante est d'établir que $\dim(E) \leq np$.

III. **Démonstration du résultat :**

On considère $M \in E$ et on l'écrit sous forme de matrice par blocs (en posant $q = n-p$) : $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Pour tout $r \in [\![1,q]\!]$, on note L_r la $r^{\text{ième}}$ ligne de B et pour tout $s \in [\![1,q]\!]$, on note C_s la $s^{\text{ième}}$ colonne de C.

1. Expliquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $N_t = \begin{pmatrix} A - tI_p & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est une matrice de rang inférieur ou égal à p.
2. Soit $(k,l) \in [\![p+1,q]\!]^2$. On note $f(t)$ l'application qui à t associe le déterminant de la sous-matrice de taille $p+1$ de N_t constituée des p premières lignes et de la ligne k, et des p premières colonnes et de la colonne l.
   $$f(t) = \begin{vmatrix} A - tI_p & C_s \\ L_r & d_{r,s} \end{vmatrix}$$
   avec $s = l - p$, $r = k - p$.
   a. Montrer que f est un polynôme en t de degré inférieur ou égal à p.

b. Expliquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$.

c. En considérant le coefficient dominant de f, conclure que la matrice D est nulle.

Ainsi $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

3. a. En utilisant la fonction f ci-dessus, montrer que pour tout $r \in [\![1, q]\!]$, pour tout $s \in [\![1, q]\!]$, $L_r C_s = 0$.

   b. En déduire que $BC = 0$.

4. On considère l'application

$$\theta : \begin{cases} E & \to \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix} & \mapsto (A, C + {}^tB) \end{cases}.$$

   a. Montrer que θ est une application linéaire.

   b. Montrer qu'elle est injective de E dans $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

5. Conclure.

IV. Quelques applications :

1. En utilisant le théorème démontré dans ce problème, retrouver le résultat connu : tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible.
2. Plus généralement, montrer que pour tout $q \in [\![1, n-1]\!]$, pour tous hyperplans $H_1, \dots H_q$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel $E = \bigcap_{k=1}^{q} H_k$ contient au moins une matrice inversible.

V. Espaces de dimension maximale :

On considère dans cette partie E un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans V_p et on suppose que $J_p \in E$. On suppose de plus que $\dim(E) = np$.

1. Expliquer que l'application θ définie question III4 est dans ce cas un isomorphisme.
2. Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \in E \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à pq.
3. Établir que l'application linéaire

$$\Theta : \begin{cases} E & \to \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix} & \mapsto \left(A, \begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

   réalise un isomorphisme de E sur $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}) \times G$.

4. Montrer que si $(U, V) \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors il existe $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\begin{vmatrix} A & U \\ {}^tV & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.
5. En déduire que pour tout $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \in E$, nécessairement $B = 0$ ou $C = 0$.
6. En déduire que soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ (A, C) \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \right\}$, soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix},\ (A, B) \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R}) \right\}$.
7. En déduire que si E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans V_p et de dimension $\dim(E_0) = np$, alors E_0 est soit de la forme K_F avec $\dim(F) = n - p$, soit de la forme I_F avec $\dim(F) = p$.