

Problème 1 Centrale PC 2004

Dans tout le problème, $\mathcal{P}$ désigne le plan affine euclidien, que l'on munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout $(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{R}^6$ (avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$), on note $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$ la conique (vide ou non) ayant une équation de la forme

$$M(X, Y) \in \mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)} \iff AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0.$$

Le but du problème est notamment l'étude de l'ensemble des points communs à certains ensembles de coniques.

I Préliminaires

- (a) Montrer que les fonctions $\theta \mapsto \cos 2\theta$; $\theta \mapsto \sin 2\theta$; $\theta \mapsto \cos \theta$; $\theta \mapsto \sin \theta$; $\theta \mapsto 1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ forment une famille libre dans l'espace des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire montrer que s'il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $a \cos 2\theta + b \sin 2\theta + c \cos \theta + d \sin \theta + e = 0$, alors nécessairement $a = b = c = d = e = 0$.

- (b) Soit un cercle quelconque du plan P , que l'on supposera de rayon $\rho > 0$. Montrer que si le cercle est inclus dans la conique $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$, alors $A = C$ et $B = 0$. Réciproquement, que peut-on dire d'une conique $\mathcal{C}_{(A,0,A,D,E,F)}$?

II Soit $\mathcal{P}'$ le plan privé de l'axe Oy . On fixe $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{P}'$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des coniques $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$ vérifiant les conditions

$$M_0 \in \mathcal{C}, \quad A = C \quad \text{et} \quad E = F = 0.$$

1. a. Montrer que le seul élément, noté $\mathcal{C}_1$, de $\mathcal{E}$ qui soit un cercle a pour équation

$$x_0(X^2 + Y^2) - (x_0^2 + y_0^2)X = 0.$$

Montrer que $\mathcal{C}_1$ est tangent à l'axe Oy et indiquer une construction géométrique de son centre.

- b. Montrer qu'il existe un unique élément, noté $\mathcal{C}_2$, de $\mathcal{E}$ qui ait une équation de la forme $BXY + DX = 0$. En indiquer une caractérisation géométrique.
- c. Déterminer $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. En discuter le nombre d'éléments. En déduire l'ensemble des points communs à tous les éléments de $\mathcal{E}$.

2. On appelle ϕ l'application de $\mathcal{P}'$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M de coordonnées polaires (ρ, θ) associe le point M' de coordonnées polaires $(\rho \tan \theta, \frac{\pi}{2} - \theta)$.

- a. Montrer que ϕ est bien définie, i.e. que l'image de M ne dépend pas du choix du couple de coordonnées polaires de M choisi. Montrer que $\phi(M_0)$ appartient à toutes les coniques de $\mathcal{E}$. En déduire une construction géométrique de $\phi(M_0)$ à l'aide d'un cercle et d'une droite.
- b. Pour $M \in \mathcal{P}'$, quand a-t-on $\phi(M) \in \mathcal{P}'$? Que dire alors de $\phi \circ \phi(M)$?
- c. On appelle γ la courbe d'équation polaire, définie pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\rho = 2a \sin \theta$$

où $a > 0$ est donné. Reconnaître γ et déterminer une représentation (i.e. une équation) polaire de la courbe $\gamma' = \phi(\gamma)$. Étudier et tracer cette courbe (avec justifications).

3. Dans cette question, on suppose $|x_0| \neq |y_0|$ et on lui associe $M'_0 = \phi(M_0)$ comme ci-dessus.

- a. Montrer que quel que soit le couple (λ, μ) de réels non-nuls, il existe un réel ν , que l'on calculera, tel que la conique $C_{(\lambda,\mu)}$ d'équation $\lambda(X^2 + Y^2) + 2\mu XY + \nu X = 0$ appartienne à $\mathcal{E}$.

Lorsque $|\lambda| \neq |\mu|$, montrer que $C_{(\lambda,\mu)}$ admet un centre $\Omega_{\lambda,\mu}$ dont on déterminera les coordonnées.

- b. Le point M_0 restant fixé, montrer que tous les points $\Omega_{\lambda,\mu}$ appartiennent à la conique Γ d'équation $X^2 - Y^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2x_0}X + y_0Y = 0$. En déterminer le genre, le centre, les sommets et les axes.
- c. Déterminer les intersections de Γ avec les droites $Ox, Oy, (OM_0), (OM'_0)$ et $(M_0M'_0)$. On trouvera en général six points en tout, pour lesquels le centre de Γ joue un rôle particulier que l'on mettra en évidence.
- d. Faire une figure d'ensemble.
- e. Étudier et représenter $C_{1,1}$ et $C_{1,-1}$. On réalisera la figure en prenant $x_0 = 2$ et $y_0 = 1$. Que remarque-t-on quant à leurs axes ?